Journal of Data Analysis
Vol.2, No.2, December 2019, p. 53 - 60

Beberapa Subgrup dari $SL(2,3)$

Mahmudi[1*], Ikhsan Maulidi[2], Saiful Amri[3]

[1,2,3] Department of Mathematics, Universitas Syiah Kuala, Banda Aceh, Indonesia
E-mail: mahmudi@unsyiah.ac.id*

Abstrak

Artikel ini membahas mengenai $SL(2,3)$ dengan rincian elemen-elemennya. Dengan bantuan Tabel Cayley dibuktikan bahwa $SL(2,3)$ merupakan grup dan memiliki beberapa subgrup siklik dan subgrup tidak siklik sesuai dengan Teorema Lagrange. Lebih jauh, juga dibuktikan bahwa $SL(2,3)$ tidak memiliki subgrup berorder 12.

Informasi Artikel

Sejarah Artikel:
Diajukan 9 Feb, 2020
Diterima 21 Feb, 2020

Kata Kunci:
Grup $SL(2,3)$
Subgrup Siklik
Tabel Cayley
Teorema Lagrange

Abstract

This article discusses about $SL(2,3)$ with its detail elements. By using Cayley Table, we prove $SL(2,3)$ is a group and has cyclic subgroup and noncyclic subgroup according to The Lagrange Theorem. Futher, we also give a detail proof that $SL(2,3)$ has no subgroup of order 12.

Keyword:
Group $SL(2,3)$
Cyclic Subgroup
Cayley Table
Lagrange Theorem

1. Pendahuluan

Grup permutasi berderajat n, yaitu S_n, memiliki subgrup dengan elemen berupa permutasi genap yang dinamakan grup alternating berderajat n, dinotasikan A_n [1]. Grup alternating merupakan contoh sangkalan bahwa konvers Teorema Lagrange tidak berlaku. Gallian membuktikan pada grup A_4 yang berorder 12, tidak memiliki subgrup berorder 6, Padahal diketahui bahwa bilangan 6 merupakan salah satu pembagi dari 12 [1]. Brennan dan Machale memberikan beberapa versi bukti terkait dengan konvers Teorema Lagrange pada A_4 [2].

Contoh-contoh yang terkait konvers Teorema Lagrange juga dikenal dengan subgrup berindeks dua, Nganou menyatakan bahwa contoh-contoh tersebut sangat jarang [3]. Mackiw membahas persoalan konvers Teorema Lagrange pada grup $SL(2,3)$ [4], [5]. Grup $SL(2,3)$ merupakan grup multiplikatif dengan elemen berupa matriks berordo 2×2 dengan entri-entri merupakan elemen lapangan $\mathbb{Z}_3$.

Berdasarkan pembahasan Mackiw dan beberapa ide yang ditulis oleh Shariari melalui soal yang belum diselesaikan dalam bukunya [6], artikel ini membahas beberapa detail terkait grup $SL(2,3)$ dengan menggunakan bantuan Tabel Cayley. Artikel ini akan menyajikan detail elemen-elemen di $SL(2,3)$, kemudian menampilkan hasil operasi elemen tersebut dalam Tabel Cayley. Artikel ini juga membahas cara menentukan beberapa subgrup siklik dan subgrup tidak siklik dari $SL(2,3)$. Pada bagian akhir, dengan melengkapi berbagai detail bukti yang diklaim oleh Mackiw, penulis membuktikan bahwa $SL(2,3)$ tidak memiliki subgrup berorder 12.

2. Tinjauan Kepustakaan

Secara umum pembaca diasumsikan telah mengenal definisi grup dan beberapa sifat dasarnya. Detail dapat dipelajari pada Gallian [1], Gilbert dan Gilbert [7], dan Hungerford [8]. Grup dengan banyaknya elemen berhingga dinamakan grup hingga [8], banyaknya elemen grup berhingga dinamakan order grup G, dinotasikan $o(G)$ [1]. Grup komutatif adalah grup dengan sifat jika hasil operasi dengan menukarkan posisi elemen pertama dengan elemen kedua memberikan hasil yang sama, secara matematis ditulis $a * b = b * a$ untuk setiap $a, b \in G$ [1].

Subgrup didefinisikan sebagai himpunan tak kosong H di G yang membentuk grup terhadap operasi yang sama di G [7]. Untuk sebarang grup G, himpunan semua elemen yang bersifat komutatif terhadap semua elemen di G dinamakan pusat (*center)* dari G, yang dinotasikan $Z(G)$ [7]. Secara matematis dituliskan sebagai

$$Z(G) = \{a \in G | ax = xa \text{ untuk setiap } x \in G\}.$$

Dapat dibuktikan bahwa $Z(G)$ merupakan subgrup dari G [1].

Salah satu subgrup yang menjadi fokus pembahasan dalam artikel ini adalah subgrup siklik. Misalkan x adalah elemen di G, maka subgrup siklik adalah subgrup yang dibangun oleh x elemen G, secara matematis dinotasikan sebagai $\langle x \rangle = \{a \in G | a = x^n$, untuk suatu n∈Z} [7].

Dengan memiliki subgrup maka dapat dibentuk himpunan baru yang dinamakan dengan koset. Misalkan H subgrup dari G dan $x \in G$, maka $xH = \{xh | h \in H\}$ dinamakan koset kiri dari H di G. Dengan cara serupa, $Hx = \{hx | h \in H\}$ dinamakan koset kanan dari H di G [6]. Mahmudi membahas dengan detail cara pembentukan koset dan operasi pada himpunan koset agar terdefinisi dengan baik [9] sehingga dapat membentuk grup.

Salah satu teorema penting terkait pembahasan artikel ini adalah Teorema Lagrange yang dapat dituliskan sebagai berikut.

Teorema Lagrange [1]. Misalkan G adalah grup berhingga dan H subgrup dari G maka orde H membagi habis order G. Lebih jauh, banyaknya koset kiri (kanan) dari subgrup H di grup G adalah $\frac{o(G)}{o(H)}$. Bilangan ini dinamakan dengan indeks H di G [1].

Bukti. Bukti Teorema Lagrange dapat dibaca pada Gallian [1].

Konvers Teorema Lagrange dapat dinyatakan misalkan G grup berhingga berorde n, jika bilangan k pembagi bilangan n maka G memiliki subgrup berorder k. Telah banyak contoh sangkalan yang disajikan untuk membantah Konvers Teorema Lagrange. Dalam artikel ini, grup $SL(2,3)$ yang merupakan grup berhingga dengan order 24 dibuktikan tidak memiliki subgrup berorder 12, yang diketahui bahwa bilangan 12 merupakan pembagi bilangan 24.

3. Hasil dan Pembahasan

Diberikan lapangan $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$ maka dapat dibentuk himpunan

$$SL(2,3) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{Z}_3, ad - bc = 1 \right\}.$$

Pembahasan pertama terkait dengan order $SL(2,3)$, yaitu akan dihitung dengan rinci banyaknya elemen $SL(2,3)$. Perhitungan tersebut dapat dilakukan dengan cara sebagai berikut.

Kasus 1. Jika $ad = 0$ maka haruslah $bc = 2$, supaya determinan matriks

$$ad - bc = 0 - 2 = -2 \equiv 1.$$

Dengan demikian, $ad = 0$ hanya dipenuhi jika $a = 0$ atau $d = 0$. Jika $a = 0$ akan diperoleh bentuk matriks

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Jika $d = 0$, cukup menukar posisi bilangan pada diagonal utama dan membuang dua matriks yang berulang, akan diperoleh matriks yang sama sehingga diperoleh bentuk-bentuk

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Artinya, terdapat 10 elemen matriks dengan $ad = 0$ dan $bc = 2$.

Kasus 2. Berikutnya, jika hasil perkalian entri diagonal sekunder bernilai 0, yaitu $bc = 0$, maka haruslah $ad = 1 \equiv 4$, supaya determinan matriks

$$ad - bc = 1 - 0 = 1$$

atau

$$ad - bc = 4 - 0 = 4 \equiv 1.$$

Dengan demikian, $ad = 1 \equiv 4$ hanya terjadi, jika $a = d = 1$ atau $a = d = 2$, sehingga diperoleh

Journal of Data Analysis
Vol.2, No.2, December 2019, p. 53 - 60

bentuk-bentuk

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 0\\2 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2 & 1\\0 & 2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2 & 2\\0 & 2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2 & 0\\1 & 2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2 & 0\\2 & 2\end{pmatrix}.$$

Kedua kasus tersebut merupakan bentuk trivial karena salah satu diagonalnya bernilai nol. Selain itu, juga terdapat kemungkinan diagonal matriks tidak bernilai nol. Beberapa kemungkinan tersebut dibahas pada kasus 3 berikut.

Kasus 3. Nilai determinan matriks 1 dapat juga diperoleh dengan kombinasi $ad = 2$ dan $bc = 1$, yaitu

$$ad - bc = 2 - 1 = 1$$

atau $ad = 2$ dan $bc = 4$, yaitu

$$ad - bc = 2 - 4 = -2 \equiv 1.$$

Dengan demikian, akan diperoleh bentuk-bentuk matriks

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 2\\2 & 2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2 & 2\\2 & 1\end{pmatrix}.$$

Berdasarkan 3 kasus yang telah diuraikan, diperoleh total elemen $SL(2,3)$ sebanyak $10 + 10 + 4 = 24$ elemen. Detail elemen-elemenya dituliskan dalam indeks sebagai berikut.

$$\begin{aligned}SL(2,3) = \Big\{&a_1 = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix},\ a_2 = \begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix}0 & 1\\2 & 2\end{pmatrix}, a_4 = \begin{pmatrix}0 & 2\\1 & 2\end{pmatrix}, a_5 = \begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{pmatrix},\\ &a_6 = \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}, a_7 = \begin{pmatrix}1 & 0\\2 & 1\end{pmatrix}, a_8 = \begin{pmatrix}2 & 1\\2 & 0\end{pmatrix}, a_9 = \begin{pmatrix}2 & 2\\1 & 0\end{pmatrix}, a_{10} = \begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix},\\ &a_{11} = \begin{pmatrix}0 & 1\\2 & 0\end{pmatrix}, a_{12} = \begin{pmatrix}0 & 2\\1 & 0\end{pmatrix}, a_{13} = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{pmatrix}, a_{14} = \begin{pmatrix}1 & 2\\2 & 2\end{pmatrix}, a_{15} = \begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 1\end{pmatrix},\\ &a_{16} = \begin{pmatrix}2 & 2\\2 & 1\end{pmatrix}, a_{17} = \begin{pmatrix}0 & 1\\2 & 1\end{pmatrix}, a_{18} = \begin{pmatrix}0 & 2\\1 & 1\end{pmatrix}, a_{19} = \begin{pmatrix}1 & 1\\2 & 0\end{pmatrix}, a_{20} = \begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 0\end{pmatrix},\\ &a_{21} = \begin{pmatrix}2 & 0\\1 & 2\end{pmatrix}, a_{22} = \begin{pmatrix}2 & 0\\2 & 2\end{pmatrix}, a_{23} = \begin{pmatrix}2 & 1\\0 & 2\end{pmatrix}, a_{24} = \begin{pmatrix}2 & 2\\0 & 2\end{pmatrix}\Big\}\end{aligned}$$

Dikarenakan himpunan $SL(2,3)$ berhingga, akan lebih mudah untuk mengidentifikasi sifat-sifat yang dimiliki dengan menggunakan Tabel Cayley, yaitu tabel yang akan menampilkan hasil operasi perkalian matriks pada $SL(2,3)$. Hasil perhitungan pada Tabel Cayley tersebut dapat digunakan untuk mengidentifikasi bahwa aksioma grup berlaku pada $SL(2,3)$. Aksioma grup yang dimaksud adalah sifat tertutup, sifat assosiatif, memiliki elemen identitas, dan setiap elemen memiliki invers,

Untuk memudahkan, berikut diberikan beberapa contoh sebagai penjelasan notasi bilangan yang muncul pada Tabel Cayley tersebut. Elemen $a_2 = \begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}$ yang dioperasikan dengan elemen $a_{12} = \begin{pmatrix}0 & 2\\1 & 0\end{pmatrix}$ akan memberikan hasil sebagai berikut.

$$a_2 a_{12} = \begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 2\\1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 4\\2 & 0\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}0 & 1\\2 & 0\end{pmatrix} = a_{11},$$

merupakan operasi elemen pada baris a_2 dengan elemen pada kolom a_{12} pada Tabel Cayley. Hasil operasi kedua elemen tersebut adalah elemen a_{11}, untuk menghemat tempat penulisan maka hanya ditulis angka 11. Contoh yang lain, hasil perkalian elemen $a_{15} = \begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}$ dengan elemen $a_{19} = \begin{pmatrix}1 & 1\\2 & 0\end{pmatrix}$ dapat dilihat pada baris ke-15 dan kolom ke-19, yaitu 10, artinya hasil operasi kedua elemen tersebut adalah $a_{10} = \begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}$. Lebih lengkap, hasil Tabel Cayley ditampilkan pada Tabel 1 berikut ini.

Tabel 1 Tabel Cayley Operasi Perkalian Matriks di $SL(2,3)$

	a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8	a9	a10	a11	a12	a13	a14	a15	a16	a17	a18	a19	a20	a21	a22	a23	a24
a1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	16	18	19	20	21	22	23	24
a2	2	1	18	17	22	24	21	20	19	23	12	11	16	15	14	13	4	3	9	8	7	5	10	6
a3	3	18	9	14	13	17	23	22	1	11	21	7	20	24	6	8	15	19	2	5	10	16	12	4
a4	4	17	13	8	24	12	14	1	21	18	5	22	23	19	9	10	20	16	7	2	15	6	3	11
a5	5	22	11	18	7	13	1	15	24	20	17	4	19	10	23	9	3	12	6	14	2	21	8	16
a6	6	24	22	13	15	10	17	19	12	1	8	20	21	3	18	7	16	5	11	9	4	14	2	23
a7	7	21	17	12	1	19	5	23	16	14	3	18	6	20	8	24	11	4	13	10	22	2	15	9
a8	8	20	23	1	11	22	19	4	15	16	24	6	3	7	21	18	2	10	14	17	9	12	13	5
a9	9	19	1	24	20	15	12	16	3	21	10	23	5	4	17	22	6	2	18	13	11	8	7	14
a10	10	23	14	21	18	1	16	11	20	6	19	9	4	22	5	17	7	15	8	12	13	3	24	2
a11	11	12	24	10	19	3	8	21	5	17	2	1	14	16	13	15	23	6	22	7	20	9	4	18
a12	12	11	6	23	9	18	20	7	22	4	1	2	15	13	16	14	10	24	5	21	8	19	17	3
a13	13	16	21	19	23	20	3	6	4	5	15	14	2	11	12	1	9	7	17	24	18	10	22	8
a14	14	15	20	22	4	7	24	3	10	19	13	16	12	2	1	11	5	8	23	18	6	17	9	21
a15	15	14	8	5	17	21	6	18	23	9	16	13	11	1	2	12	22	20	10	3	24	4	19	7
a16	16	13	7	9	10	8	18	24	17	22	14	15	1	12	11	2	19	21	4	6	3	23	5	20
a17	17	4	16	20	6	11	15	2	7	3	22	5	10	9	19	23	8	13	21	1	14	24	18	12
a18	18	3	19	15	16	4	10	5	2	12	7	21	8	6	24	20	14	9	1	22	23	13	11	17
a19	19	9	2	6	8	14	11	13	18	7	23	10	22	17	4	5	24	1	3	16	12	20	21	15
a20	20	8	10	2	12	5	9	17	14	13	6	24	18	21	7	3	1	23	15	4	19	11	16	22
a21	21	7	4	11	2	9	22	10	13	15	18	3	24	8	20	6	12	17	16	23	5	1	14	19
a22	22	5	12	3	21	16	2	14	6	8	4	17	9	23	10	19	18	11	24	15	1	7	20	13
a23	23	10	15	7	3	2	13	12	8	24	9	19	17	5	22	4	21	14	20	11	16	18	6	1
a24	24	6	5	16	14	23	4	9	11	2	20	8	7	18	3	21	13	22	12	19	17	15	1	10

Beberapa karakteristik yang dapat dibaca dari Tabel Cayley tersebut adalah hasil perkalian antar dua elemen di $SL(2,3)$ masih merupakan elemen di $SL(2,3)$, artinya $SL(2,3)$ bersifat tertutup terhadap perkalian. Selain itu, dalam tiap baris atau kolom setiap elemen hanya muncul satu kali. Hasil perkalian pada baris pertama (kolom pertama) sama dengan baris (kolom) utamanya, artinya elemen a_1 merupakan elemen identitas di $SL(2,3)$. Dapat juga diamati, bahwa setiap elemen memiliki invers, yaitu dengan melihat kemunculan angka 1 dalam hasil perkaliannya. Dapat diketahui, a_{20} memiliki invers a_{17} karena $a_{20}a_{17} = a_{17}a_{20} = a_1$.

Telah diketahui bahwa o $\left(SL(2,3)\right)$ adalah 24, dan bilangan-bilangan berikut merupakan pembagi bilangan 24, yaitu 1,2,3,4,6,8,12, dan 24. Dengan demikian, berdasarkan Teorema Lagrange, maka kemungkinan order subgrup dari $SL(2,3)$ adalah bilangan-bilangan tersebut.

Dua subgrup trivial dari $SL(2,3)$ adalah $SL(2,3)$ itu sendiri dan $\{a_1\}$, dengan demikian, terdapat subgrup berorder 1 dan 24. Dapat juga langsung dihitung, bahwa $o(a_2) = 2$, dengan demikian terdapat subgrup berorder 2, yaitu $C = \{a_1, a_2\}$. Berdasarkan pengamatan Tabel Cayley, diperoleh juga bahwa salah satu sifat istimewa dari subgrup C tersebut adalah merupakan pusat dari $SL(2,3)$, yaitu elemen di C bersifat komutatif terhadap semua elemen di $SL(2,3)$. Hal tersebut dapat ditulis sebagai $a_1a_j = a_ja_1$ dan $a_2 = a_j = a_ja_2$ untuk semua $a_j \in SL(2,3)$. Dengan demikian, $C = \{a_1, a_2\} = Z\left(SL(2,3)\right)$.

Berdasarkan perhitungan langsung, juga diperoleh bahwa

$$o(a_3) = o(a_4) = o(a_5) = o(a_6) = o(a_7) = o(a_8) = o(a_9) = o(a_{10}) = 3,$$

dengan demikian terdapat setidaknya 8 subgrup berorder 3. Salah satunya, sebagai contoh yang dibangun oleh elemen a_4, yaitu $\langle a_4 \rangle = \{a_4, a_4^2 = a_8, a_4^3 = a_1\}$. Selain itu, dapat dihitung secara langsung bahwa

$$o(a_{11}) = o(a_{12}) = o(a_{13}) = o(a_{14}) = o(a_{15}) = o(a_{16}) = 4,$$

artinya $\langle a_{12} \rangle = \{a_{12}, a_{12}^2 = a_2, a_{12}^3 = a_{11}, a_{12}^4 = a_1\}$ merupakan salah satu subgrup berorder 4 di $SL(2,3)$. Subgrup lain yang berorder 4 dibangun oleh salah satu elemen $a_{11}, a_{13}, a_{14}, a_{15}$ atau a_{16}.

Untuk subgrup berorder 6, dapat dihitung bahwa

$$o(a_{17}) = o(a_{18}) = o(a_{19}) = o(a_{20}) = o(a_{21}) = o(a_{22}) = o(a_{23}) = o(a_{24}) = 6.$$

Dengan demikian, akan dapat dibentuk salah satu subgrup berorder 6, yang dibangun oleh a_{22} sebagai berikut

$$\langle a_{22} \rangle = \left\{a_{22}, a_{22}^2 = a_7, a_{22}^3 = a_2, a_{22}^4 = a_5, a_{22}^5 = a_{21}, a_{22}^6 = a_1\right\}.$$

Sementara, sudah diketahui beberapa subgrup berorder 1, 24, 2, 3, 4, dan 6. Dengan subgrup berorder 1 dan 24 adalah subgrup trivial dan subgrup berorder 2, 3, 4, dan 6 adalah subgrup siklik. Karena order terbesar elemen $SL(2,3)$ adalah 6 maka tidak ada subgrup siklik yang beroder lebih besar dari 6.

Dengan demikian, selanjutnya subgrup yang mungkin adalah subgrup tidak siklik, yaitu dengan membentuk subgrup yang dibangun lebih dari satu elemen. Caranya dengan membentuk subgrup yang dibangun oleh elemen berorder 2 dan elemen berorder 3. Misal, dengan memilih elemen a_4 sebagai elemen berorder 3 akan diperoleh.

Tabel 2 Subgrup dibangun $\langle a_2, a_4 \rangle$

	a1	a2	a4	a8	a17	a20
a1	1	2	4	8	16	20
a2	2	1	17	20	4	8
a4	4	17	8	1	20	2
a8	8	20	1	4	2	17
a17	17	4	20	2	8	1
a20	20	8	2	17	1	4

Diperoleh $\langle a_2, a_4 \rangle = \{a_1, a_2, a_4, a_8, a_{17}, a_{20}\}$, namun dapat diperhatikan lebih jauh subgrup tersebut persis sama $\langle a_{17} \rangle = \langle a_{20} \rangle$. Artinya, subgrup yang terbentuk merupakan subgrup siklik. Demikian juga, jika dipilih elemen berorder 3 lain, akan diperoleh

$$\langle a_2, a_3 \rangle = \{a_1, a_2, a_3, a_9, a_{18}, a_{19}\} = \langle a_{18} \rangle = \langle a_{19} \rangle$$
$$\langle a_2, a_5 \rangle = \{a_1, a_2, a_5, a_7, a_{21}, a_{22}\} = \langle a_{21} \rangle = \langle a_{22} \rangle$$

dan

$$\langle a_2, a_6 \rangle = \{a_1, a_2, a_6, a_{10}, a_{23}, a_{24}\} = \langle a_{23} \rangle = \langle a_{24} \rangle.$$

Dengan demikian, $SL(2,3)$ tidak memiliki subgrup tidak siklik berorder 6. Sementara membangun subgrup dengan elemen berorder 2 dan berorder 4 tetap akan diperoleh subgrup siklik beroder 4.

$$\langle a_2, a_{11} \rangle = \{a_1, a_2, a_{11}, a_{12}\} = \langle a_{11} \rangle = \langle a_{12} \rangle$$
$$\langle a_2, a_{13} \rangle = \{a_1, a_2, a_{13}, a_{16}\} = \langle a_{13} \rangle = \langle a_{16} \rangle$$

dan

$$\langle a_2, a_{14} \rangle = \{a_1, a_2, a_{14}, a_{15}\} = \langle a_{14} \rangle = \langle a_{15} \rangle.$$

Demikian juga, subgrup yang dibangun oleh elemen berorder 2 dan elemen berorder 6 merupakan subgrup siklik beroder 6. Sebagai contoh,

$$\langle a_2, a_{17} \rangle = \{a_1, a_2, a_4, a_8, a_{17}, a_{20}\} = \langle a_2, a_4 \rangle = \langle a_{17} \rangle = \langle a_{20} \rangle.$$

Selanjutnya, subgrup berorder 8 dapat langsung diamati dari Tabel 1, bahwa perkalian antar elemen berorder 4 menghasilkan elemen berorder 4 dan elemen a_1 dan a_2. Dapat dilihat pada Tabel berikut.

Tabel 3 Tabel Cayley untuk Subgrup Berorder 8

	a1	a2	a11	a12	a13	a14	a15	a16
a1	1	2	11	12	13	14	15	16
a2	2	1	12	11	16	15	14	13
a11	11	12	2	1	14	16	13	15
a12	12	11	1	2	15	13	16	14
a13	13	16	15	14	2	11	12	1
a14	14	15	13	16	12	2	1	11
a15	15	14	16	13	11	1	2	12
a16	16	13	14	15	1	12	11	2

Dengan demikian, diperoleh subgrup berorder 8, yaitu

$$\{a_1, a_2, a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{15}, a_{16}\}.$$

Bagian terakhir dari artikel ini adalah membuktikan bahwa $SL(2,3)$ tidak memiliki subgrup berorder 12. Untuk memudahkan, maka diperlukan beberapa dalil berikut. Dalil pertama terkait grup hingga yang berorder genap.

Dalil 1. *Misalkan G grup hingga berorder genap, maka G memuat paling sedikit satu elemen yang berorder* 2.

Bukti. *Jika $a \in G$ dengan $o(a) = 2$, maka $a^2 = e$ atau $a = a^{-1}$. Tulis G sebagai gabungan yang saling asing sedemikian sehingga*

$$G = \{a \in G | a \neq a^{-1}\} \cup \{e\} \cup \{a \in G | a \neq e, a = a^{-1}\}.$$

Karena order dari $\{a \in G | a \neq a^{-1}\}$ adalah genap dan order dari $\{e\}$ adalah ganjil maka haruslah order dari $\{a \in G | a \neq e, a = a^{-1}\}$ adalah ganjil. Dengan demikian, terdapat paling sedikit satu elemen dari G yang berorder 2. ■

Dalil 2 berikut diadopsi dari soal latihan yang ditulis oleh Shariari dalam buku karangannya [6]
Dalil 2. *Misalkan G adalah grup hingga dan H subgrup G. Asumsikan bahwa banyaknya elemen H adalah setengah dari banyaknya elemen G.*

(a) Jika $x \in G$ maka $x^2 \in H$,
(b) Jika $y \in G$ dengan $o(y) = 3$ maka $y \in H$.

Bukti. *Karena banyaknya koset kiri sama dengan banyaknya koset kanan,maka akan bukti dapat dilakukan dengan salah satu koset saja. Diasumsikan bahwa banyaknya elemen H adalah setengah dari banyaknya elemen G, artinya hanya terdapat dua koset yang saling berbeda dari H di G.*

(a) Ambil sebarang $x \in G$, jika $x \in H$ maka tidak ada yang perlu dibuktikan. Andaikan $x \notin H$ maka dapat ditulis $G = H \cup xH$. Karena $x^2 \in G$ maka haruslah $x^2 \in H$ atau $x^2 \in xH$, jika $x^2 \in H$ tidak ada yang perlu dibuktikan, jika $x^2 \in xH$ berakibat $x^2 = xh$ untuk suatu $h \in H$, artinya $x = h \in H$, kontradiksi dengan $x \notin H$. Artinya, untuk setiap $x \in G$ maka $x^2 \in H$.
(b) Ambil sebarang $y \in G$ dengan $o(y) = 3$. Andaikan $y \notin H$, maka dapat ditulis $G = H \cup yH$. Karena $y^2 \in G$ maka haruslah $y^2 \in H$ atau $y^2 \in yH$, jika $y^2 \in H$ maka
$$y = ey = y^3y = y^4 = (y^2)^2 \in H$$
Kontradiksi dengan $y \in H$. Jika $y^2 \in yH$ maka $y^2 = yh$ untuk suatu $h \in H$, diperoleh $y \in H$, juga kontradiksi dengan $y \in H$. Artinya, jika $y \in G$ dengan $o(y) = 3$ maka $y \in H$. ■

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $SL(2,3)$ tidak memiliki subgrup berorder 12. *Bukti yang diberikan merupakan detail dari langkah-langkah yang ditulis oleh Shariari* [6].
Dalil 3. *Grup $SL(2,3)$ tidak memiliki subgrup berorder* 12.

Bukti. *Langkah pertama adalah menghitung banyaknya elemen $SL(2,3)$, yang telah dilakukan pada bagian awal hasil pembahasan, bahwa order dari $SL(2,3)$ adalah 24. Langkah kedua adalah menghitung banyak elemen di $SL(2,3)$ yang berorder 3, telah diperoleh hasil bahwa terdapat delapan elemen yang berorder 3, yaitu $a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9$, dan a_{10}. Langkah ketiga adalah menemukan elemen berorder 2 dan elemen tersebut terdapat dalam center dari $SL(2,3)$. Langkah keempat, terakhir, misalkan terdapat subgrup H berorder 12 di $SL(2,3)$, maka berdasarkan Dalil 1, subgrup H akan memuat elemen berorder 2, dengan demikian, elemen $a_2 \in H$. Dan berdasarkan Dalil 2, semua elemen berorder 3 juga termuat di H. Padahal, untuk menjamin sifat tertutup di H maka haruslah semua elemen berorder 6, yaitu hasil kali elemen a_2 dengan sebarang elemen berorder 3, juga termuat di H. Hal ini berakibat, elemen-elemen berikut harus termuat di H, yaitu*
$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{17}, a_{18}, a_{19}, a_{20}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}.$$
Satu elemen identitas, satu elemen berorder 2, delapan elemen berorder 3, dan delapan elemen berorder 6, artinya subgrup H setidaknya memuat $1 + 1 + 8 + 8 = 18$. Jadi, tidak mungkin terdapat subgrup H yang berorder 12 di $SL(2,3)$. ■

Dengan demikian, telah dibuktikan bahwa konvers Teorema Lagrange tidak berlaku. Artinya, meskipun suatu order grup memiliki pembagi bilangan k, belum tentu grup tersebut memiliki subgrup yang berorder k. Dalam kasus $SL(2,3)$, yang merupakan grup berorder 24, dan bilangan 12 merupakan pembagi bilangan 24, tetapi $SL(2,3)$ tidak memiliki subgrup yang berorder 12.

4. Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan, dapat disimpulkan bahwa grup $SL(2,3)$ memiliki 24 elemen dan merupakan grup tidak komutatif. Grup $SL(2,3)$ memiliki beberapa subgrup berorder $1, 2, 3, 4, 6, 8$ dan 24. Subgrup berorder 1 dan 24 merupakan subgrup trivial, sementara subgrup tak trivial adalah subgrup berorder $2, 3, 4, 6$ yang merupakan subgrup siklik, dan subgrup berorder 8 bukan merupakan subgrup siklik.

Meskipun bilangan 12 merupakan pembagi bilangan 24, order dari grup $SL(2,3)$, grup tersebut tidak memiliki subgrup berorder 12. Dengan demikian, grup $SL(2,3)$ merupakan salah satu contoh bahwa konvers Teorema Lagrange tidak berlaku. Sebagai saran, penelitian lebih lanjut dapat dilakukan pada grup $SL(2,5)$.

Daftar Pustaka

[1] J. A. Gallian, *Contemporary Abstract Algebra*, 9th ed. Boston: Cengage Learning, 2017.
[2] M. Brennan and D. Machale, "Variations on a Theme: A_4 Definitely Has no Subgroup of Order Six!," *Math. Mag.*, vol. 73, no. 1, p. 36, Feb. 2000.
[3] J. B. Nganou, "How rare are subgroups of index 2?," *Math. Mag.*, vol. 85, no. 3, pp. 215–220, Jun. 2012.
[4] G. Mackiw, "Finite Groups of 2×2 Integer Matrices," *Math. Mag.*, vol. 69, no. 5, pp. 356–361, 1996.
[5] G. Mackiw, "The Linear Group SL (2, 3) as a Source of Examples," *Math. Gaz.*, vol. 81, no. 490, p. 64, Mar. 1997.
[6] Shariar Shariari, *Algebra in Action, A Course in Groups, Rings, and Fields*. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2017.
[7] L. Gilbert and J. Gilbert, *Elements of Modern Algebra.*, 8th ed. Stamford: Cengage Learning, 2015.
[8] T. W. Hungerford, *Abstract Algebra, an Introduction*, Third. Boston: Books/Cole, Cengage Learning, 2014.
[9] M. Mahmudi, "Suatu Catatan tentang Subgrup Normal dan Ideal," *J. Data Analysis*, vol. 1, no. 2, pp. 77–82, Dec. 2018.